

**Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной и
методической работе

_____ Е.А. Каменева

29.12.2022 г.

И.А. АЛЕКСАНДРОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 - Прикладная математика и информатика,
ОП «Анализ данных»

*Рекомендовано Ученым советом
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол №27 от 15.12.2022г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного
Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол №6 от 13.12.2022 г.)*

Москва 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Наименование дисциплины	2
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине.....	2
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	2
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся.....	3
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	3
5.1. Содержание дисциплины	3
5.2. Учебно-тематический план.....	6
5.3. Содержание семинаров, практических занятий	6
6. Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	8
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы.....	8
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	9
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	10
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	13
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	14
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	14
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем.....	16
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	17

1. Наименование дисциплины

«Дифференциальные уравнения».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ПКН-1	Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.	Знать: основные понятия, типы дифференциальных уравнений, методы их решения Уметь: решать прикладные задачи с использованием теории дифференциальных уравнений
		Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.	Знать: методы решения дифференциальных уравнений, применяемых при построении математических моделей в области экономики и финансах Уметь: строить и модифицировать математические модели в области экономики и финансов, используя теорию дифференциальных уравнений

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к Общефакультетскому (предпрофильному) циклу по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика, ОП «Анализ данных».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 5 (в часах)
Общая трудоёмкость дисциплины	4/144	144
<i>Контактная работа – Аудиторные занятия</i>	<i>50</i>	<i>50</i>
<i>Лекции</i>	<i>16</i>	<i>16</i>
<i>Семинары, практические занятия</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Самостоятельная работа</i>	<i>94</i>	<i>94</i>
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, их решения. Нормальная форма уравнения первого порядка. Поле направлений, интегральные кривые.

Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения. Общее и частное решения уравнения. Общий интеграл. Особые решения.

Уравнения, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными; линейные; Бернулли и Риккати; однородные; в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель для уравнения в симметричной форме.

Тема 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Нормальная форма уравнения n -го порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальной форме. Общее и частное решения.

Линейные уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка.

Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Вронского. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного уравнения

Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного уравнения. Теорема о существовании ФСР. Теорема о представлении общего решения линейного однородного уравнения. Пространство решений линейного однородного уравнения.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Построение частного решения методом вариации постоянных.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и фундаментальная система решений линейного однородного уравнения. Построение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Уравнения, допускающие понижение порядка: не содержащие явно искомой функции или независимой переменной; однородные уравнения.

Тема 3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Системы уравнений в нормальной форме. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения.

Линейные системы. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы.

Линейно зависимые и линейно независимые системы вектор-функций. Определитель Вронского. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы.

Фундаментальная система решений (ФСР) для системы линейных уравнений. Теорема о существовании ФСР. Теорема о представлении общего решения линейной однородной системы. Пространство решений линейной однородной системы.

Структура общего решения линейной неоднородной системы. Построение частного решения методом вариации постоянных.

Линейные системы с постоянными коэффициентами. Однородные системы. Характеристическое уравнение. Общее решение однородной системы. Построение частного решения неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов.

Тема 4. Разностные уравнения

Порядок уравнения. Задача Коши.

Линейные разностные уравнения. Фундаментальная система решений. Определитель Казоратти. Структура общего решения. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

Тема 5. Задачи с экономическим содержанием

Модели экономической динамики с непрерывным временем. Задача о росте производства: модели естественного и логистического роста. Модель “хищник-жертва” Лотки-Вольтерра.

Разные задачи с экономическим содержанием: определение спроса по эластичности; модель рыночного регулирования цены; моделирование поведения равновесной цены.

5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоят ельная работа	
			Общая, в т. ч.:	Лекц ии	Семинары, практическ ие занятия		
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	44	16	6	10	28	Самостоятель ные работы. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседовани я по домашним заданиям.
2.	Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков	38	12	4	8	26	
3.	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	24	8	2	6	16	
4.	Разностные уравнения	22	8	2	6	14	
5.	Задачи с экономическим содержанием	16	6	2	4	10	
	В целом по дисциплине	144	50	16	34	94	Согласно учебному плану: контрольная работа
	Итого в %		35	32	68	65	

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8,9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к линейным. Уравнения Бернулли и Рикатти. Однородные уравнения и сводящиеся к ним уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. <i>Рекомендуемые источники: п.8, [1-5]</i>	Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях. Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков	<p>Линейные уравнения 2-го порядка: однородные и неоднородные</p> <p>Линейные уравнения высших порядков</p> <p>Уравнения, допускающие понижение порядка</p> <p><i>Рекомендуемые источники: п.8, [1-5]</i></p>	<p>Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях.</p> <p>Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	<p>Однородные системы дифференциальных уравнений. Случай Простых собственных значений. Случай кратных собственных значений</p> <p>Неоднородные системы дифференциальных уравнений. Построение частного решения неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов.</p> <p>Сведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению</p> <p><i>Рекомендуемые источники: п.8, [1-5]</i></p>	<p>Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях.</p> <p>Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Разностные уравнения	<p>Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.</p> <p>Неоднородные линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.</p> <p><i>Рекомендуемые источники: п.8, [1-5]</i></p>	<p>Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях.</p> <p>Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Задачи с экономическим содержанием	<p>Задача о росте производства. Модели естественного и логического роста. Модель «хищник-жертва» Лотки-Вольтерра.</p> <p>Модель рыночного регулирования цен.</p> <p>Моделирование поведения равновесной цены.</p> <p><i>Рекомендуемые источники: п.8, [1-5]</i></p>	<p>Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях.</p> <p>Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>

6. Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	Уравнения Риккати	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков	Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Разностные уравнения	Фундаментальная система решений разностного уравнения	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Задачи с экономическим содержанием.	Модели экономической динамики с непрерывным временем	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные задания контрольной работы

Решить дифференциальные уравнения

1. $y^2 y' = e^{-y^3} \ln x; y(e^3) = \sqrt[3]{3}$

2. $x^2 y' - 4xy + 3x^2 y^2 = 50$

3. $y' = 3 \frac{y}{x} - 2$

4. $y' = \frac{4x + 21y - 25}{24x + y - 25}$

5. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

6. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$

7. $y' = y^4 \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x$

8. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

9. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$$

10. Решить разностное уравнение $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n.$

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. *«Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».*

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
ПКН-1 Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.	Знать: основные понятия, типы дифференциальных уравнений, методы их решения Уметь: решать прикладные задачи с использованием теории дифференциальных уравнений	Решить дифференциальное уравнение $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = 0,5x; y(0) = 2/3$ Пусть F - номинальная стоимость купонной облигации, K - величина купона, $P(n)$ - текущая стоимость облигации в конце n -го купонного периода, k - число купонных периодов, r - процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях. Предполагается, что она неизменна в течении всего обращения облигации. $P(k) = F; P(n+1) + K = (1+r)P(n)$ Определить текущую стоимость купонной облигации.
	Отбирает для решения	Знать: методы решения	Опишите математические модели экономической

	исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.	дифференциальных уравнений, применяемых при построении математических моделей в области экономики и финансах Уметь: строить и модифицировать математические модели в области экономики и финансов, используя теорию дифференциальных уравнений	динамики с непрерывным временем (модель естественного роста, неоклассическая модель роста). Описать модель Самуэльсона-Хикса. Вывести уравнение Хикса и определить виды динамики.
--	--	--	--

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Определение дифференциального уравнения первого порядка. Нормальная форма уравнения первого порядка.
2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши ДУ первого порядка.
3. Общее и частное решения уравнения ДУ первого порядка. Особые решения.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и сводящиеся к ним.
5. Уравнения Бернулли, уравнения Риккати.
6. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и сводящиеся к ним.
8. Определение дифференциального уравнения n -го порядка. Нормальная форма уравнения n -го порядка.
9. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальной форме.

10. Линейные уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка.
11. Определитель Вронского.
12. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного уравнения n -го порядка.
13. Теорема о существовании ФСР для линейного однородного уравнения n -го порядка.
14. Теорема о представлении общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка. Пространство решений линейного однородного уравнения.
15. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме.
16. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
17. Линейные системы. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы.
18. Линейно зависимые и линейно независимые системы вектор-функций.
19. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы.
20. Фундаментальная система решений (ФСР) для системы линейных уравнений. Теорема о существовании ФСР.
21. Теорема о представлении общего решения линейной однородной системы. Пространство решений линейной однородной системы.
22. Фундаментальная система решений линейных разностных уравнений.
23. Определитель Казоратти.
24. Модели экономической динамики с непрерывным временем.
25. Модели экономической динамики с непрерывным временем. Задача о росте производства: модели естественного и логистического роста.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная:

1. Дергачев В. М. Дифференциальные и разностные уравнения: учебное пособие / В. М. Дергачев [и др]. – Москва : Русайнс. - 2018. - 96 с. – ЭБС BOOK.ru. - URL: <https://book.ru/book/926700> (дата обращения: 29.12.2022). - Текст : электронный.
2. Боровских А. В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт. - 2022. — 327 с. — ЭБС Юрайт. - <https://urait.ru/bcode/490346> (дата обращения: 29.12.2022). - Текст : электронный.
3. Аксенов А. П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — Москва : Юрайт. - 2022. — 359 с. — ЭБС Юрайт. - URL: <https://urait.ru/bcode/490793> (дата обращения: 29.12.2022). - Текст : электронный.

б) дополнительная:

4. Бибииков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие. — Санкт-Петербург : Лань. - 2022. — 304 с. — ЭБС Лань. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210617> (дата обращения: 29.12.2022). - Текст : электронный.
5. Пантелеев А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: учебное пособие. – Москва : ИНФРА-М. - 2019. - 432 с. – ЭБС ZNANIUM.com. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1010761> (дата обращения: 29.12.2022). - Текст : электронный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ)
<http://elib.fa.ru/> (<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
- Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znaniy.com>
- Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
- Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ»
<https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система издательства «Лань»
<https://e.lanbook.com/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит как в аудитории, так и вне аудитории. В учебно-тематическом плане программы дисциплины указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения.

При подготовке к лекции целесообразно предварительно познакомиться с ее содержанием по рекомендованным пособиям и выделить наиболее трудные вопросы, которые можно задать преподавателю во время лекции. Лекцию следует конспектировать. После занятий следует еще раз детально проработать содержание лекции. Сделанные записи нужно сверить с учебниками и учебными пособиями и в случае расхождений проконсультироваться с преподавателем.

Методические указания по проведению практических занятий

По структуре практические занятия следует разделить на учебные и контрольные.

● **Учебные практические занятия** структурно состоят из следующих компонент:

- 1) проверка наличия качественно выполненного домашнего задания каждого студента;
- 2) разбор типичных ошибок, возникших в проделанной самостоятельно домашней работе;
- 3) рассмотрение теоретических вопросов, связанных с текущим практическим занятием;
- 4) разбор методов выполнения практических заданий и решения задач;
- 5) корректировка заданий для самостоятельной работы студентов;
- 6) интерактивная форма – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) – представляет собой решение списка задач, определенных преподавателем, в группе из небольшого количества студентов. В каждой группе есть «сильный» студент, который может выполнять функции консультанта и помощника преподавателю. Работа группы оценивается по количеству правильно решенных задач.

● **Контрольные практические занятия** структурно состоят из следующих компонент:

- 1) проведение аудиторной контрольной работы;
- 2) проверка наличия контрольной работы каждого студента;
- 3) разбор типичных ошибок, возникших при выполнении контрольной работы.

При подготовке к практическому занятию необходимо повторить или, если это требуется, изучить соответствующий теоретический материал. Во время занятия нужно точно записывать формулировки решаемых задач,

вопросы, указания преподавателя к решению и разбираемые решения. После занятий необходимо просмотреть записанные решения и восстановить в решениях имеющиеся пробелы. В случае затруднений отметить соответствующие задания и обратиться за консультацией к преподавателю.

Домашние задания следует выполнять регулярно при подготовке к практическим занятиям. В большинстве своем задания являются типовыми, и образцы их решения содержатся в рекомендованных пособиях, в материале лекций и практических занятий. Если то или иное задание вызвало затруднение необходимо обратиться к преподавателю на консультации или ближайшем практическом занятии. Регулярность в выполнении домашних заданий — важный фактор освоения дисциплины.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11. 1. Комплект лицензионного программного обеспечения

1. Пакет офисных программ
2. Антивирус Kaspersky

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации

- не используются

12. Описание материально-технической базы, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Требуется мультимедийный класс для проведения лекционных занятий.